Д. ШНОЛЬ,
dchnol@gmail.ru,
г. Москва

Запись лекции на эту тему можно посмотреть здесь: https://youtu.be/VWhe2w1zuu0 (это короткая ссылка).

Автор благодарит А.И. Сгибнева за настойчивое побуждение к написанию этой статьи и за полезные обсуждения.

10–11 классы. Часть 1

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ В СТАРШИХ КЛАССАХ

Современные школьники обладают многими психологическими особенностями, отличающими их от учеников 20–30-летней давности. Одна из них состоит в том, что современный ученик с удивительной и огорчительной для учителя скоростью «выбрасывает в корзину» знания и умения, которыми он не пользуется в течение двух-трех месяцев. Если же перерыв в использовании на уроках некоторой темы достигает полугода, то можно уверенно утверждать, что подавляющее большинство учащихся забыло почти все, что было изучено, усвоено, опрошено и отработано. Так, например, если в первом полугодии 10-го класса изучалась тригонометрия и классу не приходилось повторять, как решать квадратичные неравенства, то к январю даже те, кто бодро решал эти неравенства в 9-м классе, повально показывают свою полную неосведомленность в этом вопросе. Из года в год повторяющаяся неравномерность знаний наших школьников по разным темам (все классы прилично знают квадратные уравнения или теорему Пифагора и плохо знают степень с отрицательным показателем или вписанные углы) связана не со сложностью той или иной темы, а только с регулярностью ее использования в течение всего курса.

Итак, школьники выбрасывают из перегруженной информационными потоками оперативной, а затем и долговременной активной памяти все, что не используется 2–3 месяца. Осознав этот естественный психологический механизм, мы должны найти методические инструменты, позволяющие поддерживать в активной форме все изученное ранее. Одним из мощных инструментов, выполняющих эту задачу, являются регулярные устные упражнения, которым и посвящена эта статья. Разумеется, формы проведения устных упражнений и типы заданий могут быть весьма различны. Хочу поделиться теми формами работы, которые активно использую на своих уроках.

(Похожая технология (подготовка трудных понятий с помощью «опережающих» заданий в математических диктантах) описана в статьях: *Левитас Г.Г.* Опережающее обучение по темам «Геометрические преобразования» и «Векторы» в 8 классе // Математика в школе, 2012, № 7; *Левитас Г.Г.* Опережающее обучение трудным темам // Математика, 2014, № 5.)

Технология

1. Устные упражнения проводятся в начале урока в течение 8–12 минут не реже двух раз в неделю.

2. Задания для них, как правило, не связаны с изучаемой темой. Иногда повторяем то, что нам скоро снова понадобится, иногда то, что давно не использовалось и еще долго не будет использоваться.

3. По некоторым темам устные упражнения нужны и в процессе изучения самой темы. Например, в начале изучения темы «Логарифм» или «Тригонометрические функции острого угла» устные упражнения нужны для твердого усвоения новых понятий.

4. Задания в большинстве случаев представляют собой цепочку задач с небольшим варьированием входных данных (примеры даны ниже).

5. Устные упражнения могут содержать несколько цепочек задач, как правило, по разным темам.

6. Задания должны достаточно быстро записываться на доске (то есть быть короткими по условию), чтобы не падал темп урока и не рассеивалось внимание.

7. Отвечают только те, кто хочет. Учитель добивается активности сильной трети класса. Те, кто забыл эту тему, не хочет отвечать, не умеет быстро соображать в уме и т.д., имеют полное право тихо присутствовать на «чужом празднике жизни».

8. Никакие отметки, кроме редких пятерок за какой-то выдающийся результат, не ставятся.

9. Дав задание, учитель ждет, когда поднимется примерно треть рук, потом назначает отвечающих и выписывает все предлагаемые ответы на доску, никак их не комментируя.

10. После того, как все предложенные ответы выписаны, начинается их обсуждение. Задача учителя (как и в большинстве случаев на уроке) — задавать вопросы и организовывать обсуждение, а не комментировать, что из предложенного верно, а что нет.

11. **Очень важный пункт.** Все неверные ответы дают повод для новых обсуждений:

– Как мог получиться такой ответ, в чем была ошибка, насколько она типична?

– Как можно (если можно) изменить условие задачи, чтобы ответ стал верным? Иными словами, для какой аналогичной задачи этот ответ был бы верным.

Поэтому за неверный ответ учитель так же благодарен ученику, как и за верный.

– Спасибо, Маша, ты совершила типичную ошибку, все на нее посмотрели и теперь не будут ее делать.

– Спасибо, Петя, из твоего ответа получилась новая интересная задача.

12. Учитель не ставит задачи добиться того, чтобы все поняли, как получился верный ответ. Это не объяснение нового материала и не его отработка. Это повторение и диагностика прочности знаний.

Перейдем к примерам конкретных заданий.

Свойства степени

Серия 1. Натуральный показатель, одно основание

Вычислите показатель степени (текст около каждого задания, набранный курсивом, — это комментарий для учителя).

1. $\dfrac{\left(a^4\right)^3 a^2}{a^{10}} = a^?$ *— это базовое задание, оно и его ответ остаются на доске в течение всего устного счета. С ним происходят разные пошаговые изменения (что-то дописываем, стираем, снова дописываем и т.д.).*

2. Домножим числитель:

$$\frac{\left(a^4\right)^3 a^2 \cdot a^3}{a^{10}} = a^?.$$

Как изменится результат, чему он равен?

Разумеется, ответ можно снова получить прямым вычислением. Но интереснее и полезнее думать так: левую часть равенства домножили на a^3, значит, в полученном ответе задания 1 показатель увеличится на 3.

3. Домножим знаменатель:

$$\frac{\left(a^4\right)^3 a^2}{a^{10} \cdot a^3} = a^?.$$

4. Изменим один из показателей:

$$\frac{\left(a^4\right)^3 a^2}{a^6} = a^?.$$

Показатель степени в знаменателе уменьшился на 4, следовательно, в ответе показатель должен быть на 4 больше, чем в ответе к заданию 1.

5. Изменим другой показатель:

$$\frac{\left(a^4\right)^4 a^2}{a^{10}} = a^?.$$

Здесь возможна типичная ошибка: увеличение показателя на 1 слева дает увеличение показателя на 1 справа. Ее интересно и полезно обсудить. Многие школьники на этом примере еще *раз «прочувствуют», что значит привычное правило «показатели перемножаются».*

6. Изменим третий показатель:

$$\frac{\left(a^{6}\right)^{3} a^{2}}{a^{10}}=a^{?}.$$

7. На что домножить дробь, чтобы равенство

$$\frac{\left(a^{6}\right)^{3} a^{2}}{a^{10}} \cdot a^{?}=a^{12}$$

было верным?

Серия 2. Натуральный показатель, сводится к одному основанию.

Представьте в виде степени двойки:

1. $\frac{4^{10}}{8}=2^{?}$ — *базовое задание, с которым потом происходят разные изменения.*

2. $\frac{4^{10}}{8 \cdot 16}=2^{?}$. 3. $\frac{4^{20}}{8}=2^{?}$. 4. $\frac{4^{10}}{8^{3}}=2^{?}$.

Серия 3. Натуральный показатель, два разных основания

Вычислите показатели в правой части равенства $\frac{\left(a^{2} \cdot b\right)^{5} a^{2}}{b^{7}}=a^{?} \cdot b^{?}$.

Следующие задания получаются аналогично заданиям серии 1. Главное, не увеличивать сложность скачкообразно.

В классе, привыкшем к такой форме работы, можно просить учеников придумать следующий пример серии: «Аня, предложи, на что домножить левую часть». Учитель записывает предложенное учеником, и все решают.

Серия 4. Натуральный показатель, сводится к нескольким разным основаниям

Представьте в виде произведения степеней простых чисел:

1. $\frac{6^{20}}{9^{5}}=2^{?} \cdot 3^{?}$ — *базовое задание, с которым потом происходят изменения;*

2. $\frac{6^{20} \cdot 27}{9^{5}}=2^{?} \cdot 3^{?}$. 3. $\frac{6^{20}}{9^{5} \cdot 32}=2^{?} \cdot 3^{?}$.

4. $\frac{6^{20} \cdot 12}{9^{5}}=2^{?} \cdot 3^{?}$. 5. $\frac{6^{20}}{9^{5} \cdot 18}=2^{?} \cdot 3^{?}$.

6. $\left(\frac{6^{20}}{9^{5}}\right)^{3}=2^{?} \cdot 3^{?}$. 7. $\frac{6^{20}}{9^{5}} \cdot 1000=2^{?} \cdot 3^{?}$.

Серия 5. Целый показатель

Вычислите показатель степени.

1. $\frac{\left(a^{2}\right)^{-7} a^{4}}{a^{-8}}=a^{?}$ — *это базовое задание, с которым потом происходят разные изменения.*

2. Меняем знак одного показателя:

$$\frac{\left(a^{2}\right)^{-7} a^{-4}}{a^{-8}}=a^{?}.$$

Здесь возможна типичная ошибка — изменить ответ не на 8 (удвоенный показатель), а на 4 (сам показатель). Прямого отношения к степени это не имеет, это повторение 6-го класса: что происходит в алгебраической сумме, если знак какого-то слагаемого меняется на противоположный.

3. $\frac{\left(a^{-2}\right)^{-7} a^{4}}{a^{-8}}=a^{?}$. 4. $\frac{\left(a^{2}\right)^{-7} a^{4}}{a^{8}}=a^{?}$.

5. На что нужно разделить дробь, чтобы равенство стало верным:

$$\frac{\left(a^{2}\right)^{-7} a^{4}}{a^{-8}} : ?=a^{-5}.$$

6. На что нужно разделить дробь, чтобы равенство стало верным:

$$\frac{\left(a^{2}\right)^{-7} a^{4}}{a^{-8}} : ?=a^{5}.$$

Серия 6. Целый показатель

Представьте в виде произведения степеней простых чисел.

1. $\frac{3^{20}}{12^{5}}=2^{?} \cdot 3^{?}$ — *базовое задание, с которым потом происходят изменения.*

2. $\frac{3^{20} \cdot 9^{-15}}{12^{5}}=2^{?} \cdot 3^{?}$. У какого простого числа показатель степени не изменился?

И т.д. аналогично заданиям серии 4.

Серия 7. Логарифм

Вычислите:

1. $3^{\log_3 2}$. 2. $3^{\log_3 2+1}$.

Здесь могут быть интересные неверные ответы: 5 и 3. Полезно обсудить с учениками, в результате каких ошибок они могли получиться.

3. $3^{\log_3 2-1}$. 4. $3^{3\log_3 2}$.

5. $3^{-\log_3 2}$. 6. $81^{\log_3 2}$.

7. $3^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

Приведенные серии заданий дают представление о том, что имелось в виду под «цепочкой задач с небольшим варьированием входных данных». Каждая следующая задача отличается от предыдущей каким-то одним параметром.

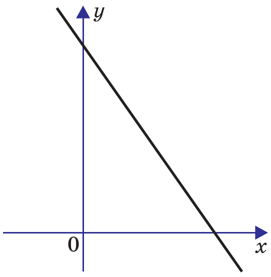

Рис. 1

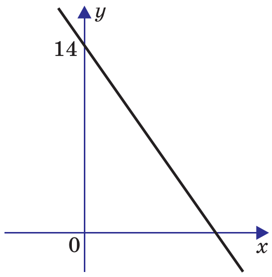

Рис. 2

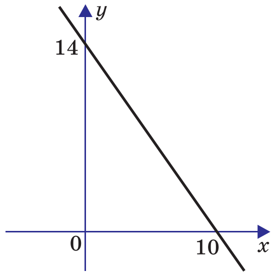

Рис. 3

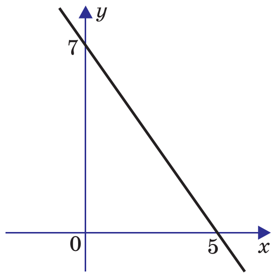

Рис. 4

Это позволяет, во-первых, повторять основные моменты темы поэлементно (умножение степеней, в следующем примере — деление степеней, в следующем — возведение степени в степень и т.д.), а во-вторых, это дает возможность буквально за секунды получить на доске новую задачу, не снижая темпа и не сбивая ритма урока, почти не поворачиваясь к классу спиной для написания нового задания.

Линейная функция

При повторении темы «Линейная функция» мы опираемся на график и из него стараемся получить всю информацию, какую только возможно. Задания подобного вида решаются сначала при изучении темы «Линейная функция», а потом переносятся в устные упражнения в 8-й и 9-й класс.

Серия 1. Знаки и значения коэффициентов k и b

1. Какой общей формулой задается функция, график которой изображен на рисунке 1?

Ожидается ответ: $y = kx + b$, *если будут другие (неверные) ответы, сразу обсуждаем, какие графики соответствуют им.*

2. Что можно утверждать о коэффициентах k и b? Почему?

Точно можно утверждать, что $k < 0$, *а* $b > 0$.

3. Считая единичные отрезки на осях одинаковыми, можно ли хотя бы приближенно найти численные значения k и b?

Это важный и непростой вопрос. Про численное значение b сказать нельзя ничего, а численное значение k можно примерно прикинуть. В данном случае модуль k больше 1, но меньше 2 (отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, больше, но не в 2 раза, отрезка на оси абсцисс). В слабом классе этот пункт можно пропустить.

4. Добавим данные (рис. 2). Что теперь можно найти?

Можно найти b, $b = 14$.

5. Еще добавим данные. Найдите уравнение прямой, изображенной на рисунке 3.

Тут наверняка будут разные ошибки. В частности, будут ответы, где k положителен. Это надо обсудить и нарисовать соответствующие графики.

6. Изменим данные (рис. 4). Что изменится в уравнении прямой?

Ответ очень поучительный. Если «данные правильные», то есть новые числа пропорциональны предыдущим (ведь угол наклона прежний), то коэффициент k не изменится, так как он показывает «внутреннее свойство картинки». А коэффициент b показывает, какие единицы измерения мы выбрали, — он полностью зависит от нас.

Серия 2. Сравнение двух функций

1. Что можно сказать про коэффициенты k и b двух линейных функций, изображенных на рисунке 5?

Тут важны как ответы, так и пояснения, в частности, почему угловой коэффициент прямой l больше углового коэффициента прямой m.

2. По-прежнему считая, что единичные отрезки на осях одинаковые, прикиньте их примерное значение. *Для слабого класса пункт можно пропустить.*

3. Добавим данные (рис. 6). Что теперь можно найти?

Можно найти уравнение прямой l и нельзя найти ни один из коэффициентов линейной

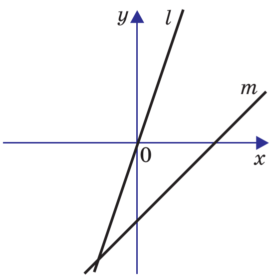

Рис. 5

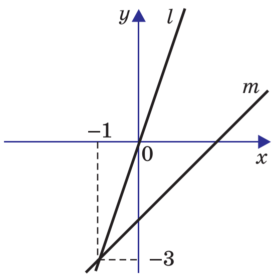

Рис. 6

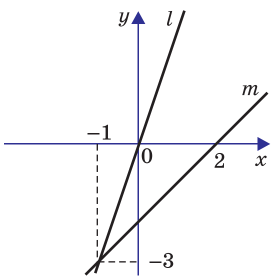

Рис. 7

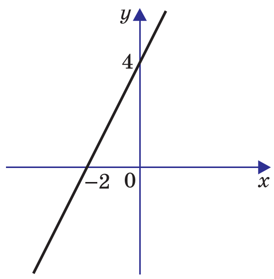

Рис. 8

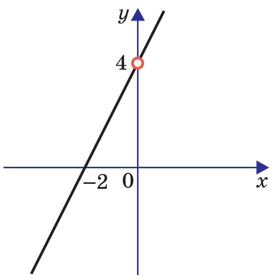

Рис. 9

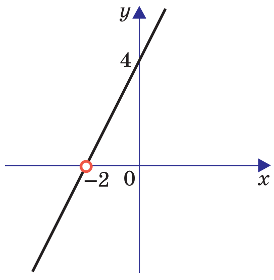

Рис. 10

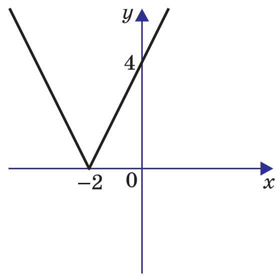

Рис. 11

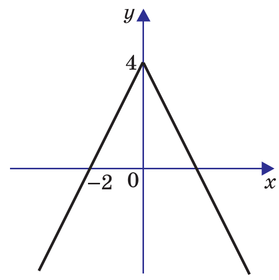

Рис. 12

функции, задающей прямую m, так как у прямой l даны две точки, а у прямой m — только одна. Очень сильный, но редкий для школьников ответ такой: можно найти зависимость между коэффициентами линейной функции, задающей прямую m.

4. Добавим данные (рис. 7). Что теперь можно найти?

Здесь тоже, скорее всего, будут ошибки, которые полезно обсуждать. Например, кто-то может сказать, что угловой коэффициент прямой m равен 1,5. Почему это точно неверно? (Угол наклона почти 45°.)

Серия 3. Выколотые точки и модули

Если при изучении темы «Линейная функция» были рассмотрены простейшие задачи на графики с модулями и выколотыми точками, то на устных упражнениях все это следует активно повторять весь 8-й класс.

1. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 8.

2. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 9. (Та же прямая, но с выколотой точкой.)

Типичной ошибкой будет такое предложение:

$$y = \frac{2x+4}{x}.$$

В 8-м классе уже можно обсудить (вспомнить), что графиком такой функции является гипербола.

Бывает, что школьники придумывают изящный способ записи верной формулы:

$$y = (2x+4)\cdot x^0$$

и это позволяет вспомнить определение степени с нулевым показателем.

3. Задание то же, но выколем другую точку (рис. 10).

Одной из ошибок будет деление и умножение на $x - 2$. Нарисуем, где будет выколотая точка в этом случае.

4. Задание то же, но отразим часть прямой от оси абсцисс (рис. 11).

Здесь, в зависимости от того, какие ошибочные формулы будут предложены, возможно, что будет нарисовано еще несколько графиков функций с модулем.

5. Если в задании 4 ошибок не было, то еще одна задача (рис. 12).

УСТНЫЙ СЧЕТ БЕЗ ОШИБОК

М. СТАРШОВ,
г. Саратов

В рассылке Интернета (http://zhizninauka.info/topics/nesereznye-fakty-obo-vsem-na-svete/?auth=mail_key) два англичанина, много лет ведущих занимательную программу на телевидении, сообщили: «Если бы один вампир питался один раз в день и всякий раз обращал своих жертв в вампиров, все население планеты превратилось бы в вампиров чуть больше чем за месяц».

Проверим, ведь в самом деле это любопытно. И дает шанс вспомнить логарифмы, а то они без употребления ржавеют. Так как по предположению англичан количество вампиров удваивается ежедневно, то через месяц число приятных соотечественников будет равно $2^{30} = N$. Следовательно, $\log N = 30\log 2$. А этот последний логарифм я помню с детства, это 0,301. В уме легко считаю, что $\log N \approx 9$, а само число N есть просто миллиард. А нас на Земле, кажется, уже почти 7 миллиардов! Существенно больше, в целых семь раз.

Давайте уточним. Число вампиров N стало бы равно примерно семи миллиардам через x дней, так что

$$\log N = x\log 2 \approx 0{,}3x = 9 + \log 7 \approx 9{,}85.$$

И это значит, что $x \approx 32{,}8$. В самом деле, добавить этим ребятам всего 3 дня — и нас, вампиров, станет 100%.

Фантастика, правда? За месяц перекусан миллиард, а за следующие три дня к этому числу прибавится еще шесть таких же миллиардов!

Учите, дети, логарифмы!

Д. ШНОЛЬ,
г. Москва

10–11 классы. Часть 2

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ В СТАРШИХ КЛАССАХ

В первой части статьи, посвященной устным упражнениям в старших классах, мы говорили, что одной из главных целей их регулярного применения является поддержание в «активной форме» всего изученного материала. Разумеется, это не единственная цель. Обсудим еще две важные задачи, которые они позволяют решить в той или иной степени.

Тренинг внимания

Рассеянное внимание — очень распространенное явление у современных детей и особенно подростков. Ошибки «из-за невнимательности» делают сплошь и рядом как слабые, так и сильные ученики. Эти ошибки огорчают всех: и учителей, и учеников, и родителей. Но «рецепт», который учителя дают своим ученикам, как правило, абстрактен: «будь внимателен», «проверяй свою работу». Как это «быть внимательным»? Что значит быть в состоянии сосредоточенности? Как этому можно научиться? Как при проверке увидеть свою собственную ошибку? Все эти насущные вопросы мы по большей части оставляем в стороне и ограничиваемся общими призывами. Между тем внимательности можно и нужно учиться. Устная работа — одно из отличных упражнений на внимание.

Чем решение задачи в уме отличается от решения на бумаге? Тем, что при решении в уме вы ни на мгновение не можете отвлечься. В противном случае вам придется решать заново — ход мысли и промежуточные результаты будут потеряны. Когда вы решаете задачу письменно, вы можете в любой момент переключить свое внимание на что-то постороннее — вы ничего не потеряете, у вас есть возможность вернуться к своим записям и продолжить. В нашей школьной традиции математика, а особенно алгебра, преимущественно письменный предмет. Ученик может целый урок что-то бездумно писать, переписывать с доски, якобы решать задачу, параллельно посылая эсемески и т.п. Понять, сосредоточен ученик или нет, пока он глядит в тетрадь, а рука его водит по бумаге, крайне затруднительно. При устной же работе, когда все головы подняты и все глаза перед вами, вы прекрасно видите, кто, что и насколько понимает.

Множество типичных заданий из любого учебника средний ученик может решить устно. Например, опыт показывает, что сократить в уме дробь $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ при определенном навыке может

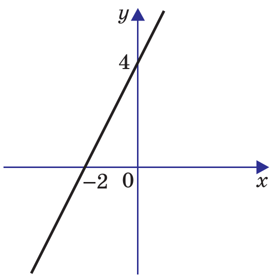

Рис. 1

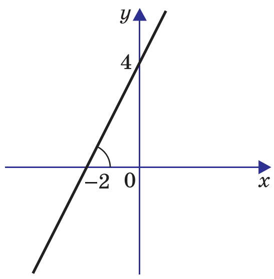

Рис. 2

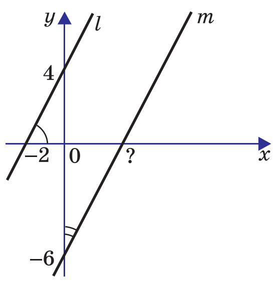

Рис. 3

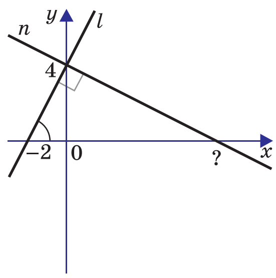

Рис. 4

практически каждый. В сильном классе мне удавалось добиваться того, что гораздо более сложную дробь $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}$ большинство сокращало в уме (корень 1 виден и в числителе и в знаменателе, дальше нетрудно «сообразить» другие корни по теореме Виета).

Таким образом, вместо благих, но невыполнимых призывов «стать внимательным», мы создаем на уроке регулярную ситуацию, позволяющую ученику приобрести навык произвольной сосредоточенности.

Устные упражнения позволяют также «собрать» класс в начале урока, задать правильный рабочий ритм.

Связь между темами курса

Устные упражнения позволяют обсуждать изученные темы в связи с новыми и выстраивать различные связи между темами курса. Приведем один пример. Линейная функция, как правило, изучается в 7-м классе. Однако то, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой, ученик узнает только в 10-м или 11-м классе при изучении производной. У большинства школьников складывается впечатление, что «тангенс угла наклона — это что-то про касательную», а не про любую прямую: настолько прочно связаны у него определение производной, касательная и знание про тангенс. Почему так происходит? Понятно почему. В 7-м классе школьники еще не знают, что такое тангенс. В 8-м классе, когда изучают тангенс острого угла, линейную функцию «уже изучили» — и о ней в курсе алгебры уже ни слуху, ни духу. Да к тому же непонятно, как быть с тупыми углами. Когда тангенс вводится для тупого угла (9-й класс), связать его с линейной функцией также некогда и негде. Между тем это легко делается на устных упражнениях. И начинать стоит уже в 8-м классе; с одной стороны, это будет прекрасной пропедевтикой идеи, как обобщить понятие тангенса для тупых углов, с другой — в геометрии практически нет содержательных задач про тангенс и применить новое понятие к линейной функции — это дополнительно «узаконить» его введение. Приведем пример серии задач на эту тему.

Серия 1

1. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 1.

Напомним «технологию» (подробно она описана в первой части статьи). Сначала все предложенные ответы выписываются учителем на доске и никак не комментируются. Потом идет обсуждение, какой из предложенных ответов верный и почему. Для всех неверных ответов учеников рисуется соответствующий график.

2. Найдите синус, косинус и тангенс угла, обозначенного на рисунке 2.

Среди возможных ошибок будет отрицательный косинус. Здесь следует сказать, что для острых углов так не бывает, а для других очень даже бывает (но об этом мы узнаем в 9-м классе). То, что тангенс угла «совпадет» с угловым коэффициентом, может привести к вопросу, случайно ли это. Дальше (в зависимости от класса) можно действовать по-разному. Можно взять и изучить на уроке это «неожиданное совпадение», можно дать задание на дом посмотреть другие примеры и подумать и т.д.

Для большего понимания связи углового коэффициента прямой, подобия и тригонометрических функций полезно решить следующую задачу.

3. Прямые m и l на рисунке 3 параллельны. Найдите уравнение прямой m, точку ее пересечения с осью абсцисс и тригонометрические функции отмеченного двумя дугами угла.

Эта нетрудная задача связывает сразу несколько тем: линейная функция, углы при параллельных прямых, подобие, тригонометрические функции острого угла.

4. В сильном классе можно решить задачу о взаимно перпендикулярных прямых.

Прямая n на рисунке 4 перпендикулярна прямой l. Найдите точку пересечения прямой n с осью абсцисс и ее уравнение.

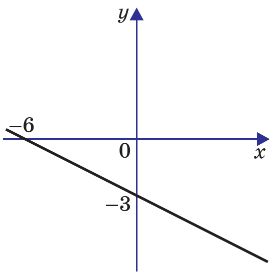

Рис. 5

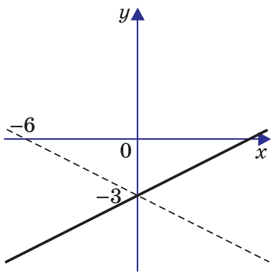

Рис. 6

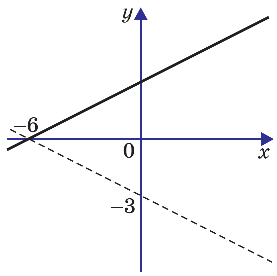

Рис. 7

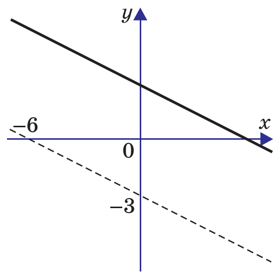

Рис. 8

Здесь устные упражнения легко могут перерасти в общее исследование, результаты которого будут потом записаны.

Если в классе только несколько достаточно сильных учеников, то задачу можно поставить всему классу, а решение отложить на домашнее задание как задачу «на отдельную пятерку».

Покажем еще один пример связывания «далеких» тем курса на устных упражнениях. Во время изучения темы «Преобразования плоскости» хорошо бы подключить эту тему к задачам о графиках функций при устной работе. При этом если отражение относительно осей координат графиков функций к этому моменту уже могло быть изучено, так как это необходимо для построение графиков с модулем, то центральная симметрия в разговорах о графиках, как правило, еще не упоминалась.

Серия 2

1. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 5.

2. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно оси Oy, задайте формулой новую функцию (рис. 6).

3. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно оси Ox, задайте формулой новую функцию (рис. 7).

Мы получаем прекрасный повод обсудить, почему прямые, полученные на рисунках 6 и 7, оказались параллельны друг другу (это непростой вопрос). Это подводит нас к четвертой задаче про центральную симметрию.

4. Прямую, изображенную на рисунке 5, отразили относительно начала координат, задайте формулой новую функцию (рис. 8).

Эта задача актуализирует свойство центральной симметрии, переводящей любую прямую либо саму в себя, либо в параллельную ей прямую.

Аналогичную задачу можно решить, если сначала задать график квадратичной функции.

Заметим, что в этих задачах везде есть как конкретное числовое решение, так и общее рассуждение (с заменой x на $-x$, y на $-y$ и т.д.). Решив пару конкретных задач, можно провести (уже письменно) решение в общем виде для функции $y = kx + b$: задать все функции, графики которых получаются при различных симметриях данной прямой.

Покажем еще несколько примеров устных упражнений на различные темы.

Неравенства

Разумеется, решать устно не самые простые неравенства в обычном классе невозможно. Однако решать «обратную задачу» — восстановить неравенство по картинке, отражающей его решение, можно, полезно и довольно увлекательно. Начнем с простой серии.

Серия 1

1. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 9.

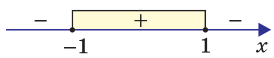

Рис. 9

Разумеется, здесь возможны различные варианты. Предположим, ученики предложили такие:

а) $x^2 < 1$;
б) $1 - x^2 \geq 0$;
в) $|x| - 1 \leq 0$;
г) $1 - |x| \geq 0$;
д) $-(x - 1)(x + 1) \geq 0$;
е) $x^2 - 1 \geq 0$;
...

Выписав все их на доску, начнем разбирать предложенные учениками неравенства.

Неравенства «а» и «е» имеют другие решения, в первом случае точки выколотые, во втором — решением является объединение двух лучей. Благодарим тех, кто предложил эти неравенства (так как они сделали типичную ошибку и позволили нам все хорошо повторить) и по словесным описаниям учеников рисуем картинки, изображающие решения этих неравенств.

У остальных четырех неравенств ответ общий: $[-1;\ 1]$. Однако посмотрим внимательно на рисунок. На отрезке $[-1;\ 1]$ стоит знак «+». Традиционно так обозначают знак выражения, стоящего в левой части неравенства. Для неравенств «а», «г» и «д» — это верно, а для неравенства «в» — нет, для него правильная картинка с противоположными знаками, но таким же ответом.

Далее мы можем двигаться в разных направлениях: менять точки на выколотые, менять значения нулей или менять знаки. В несильном классе можно, например, двигаться так.

2. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 10.

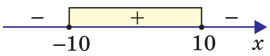

Рис. 10

Здесь возможна такая ошибка: $10 - x^2 \geq 0$. *Как обычно, рисуем соответствующую предложенному неравенству картинку.*

3. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 11.

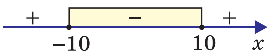

Рис. 11

Здесь нужно поменять и знак неравенства, и знаки левой части. Наверняка будут ошибки, которые полезно обсудить.

Серия 2

В более сильном классе можно пропустить задание 2, а после задания 3 пойти так.

4. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 12.

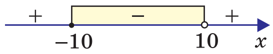

Рис. 12

Здесь придется вводить дробь. Это повод обсудить, какое выражение должно быть в знаменателе.

5. Возвращаемся к первоначальному неравенству и выкалываем дополнительную точку (рис. 13):

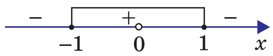

Рис. 13

Наверняка будут предложения вида $\dfrac{1-x^2}{x} \geq 0$.

Как обычно, рисуем к ним верную картинку и вспоминаем, от чего зависит смена знака.

6. Теперь добавляем отдельную точку (рис. 14):

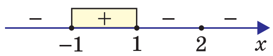

Рис. 14

7. Вернемся еще раз к первому заданию серии 1. Но для этой же картинки добавим условие, например, задайте неравенство 6-й степени. Не всякий класс быстро сообразит, что подходит $(1 - x^2)^3 \geq 0$ или $-(x - 1)(x + 1)^5 \geq 0$.

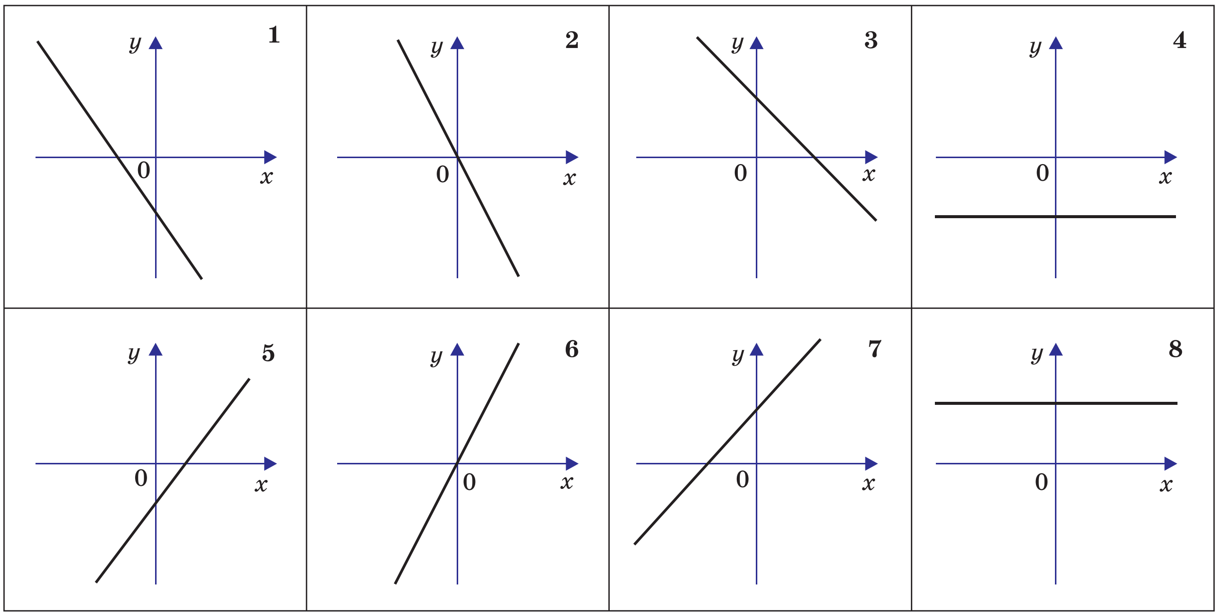

Рис. 15

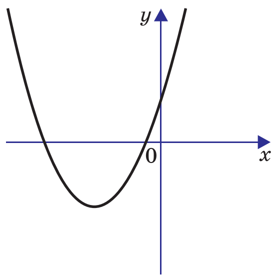

Рис. 16

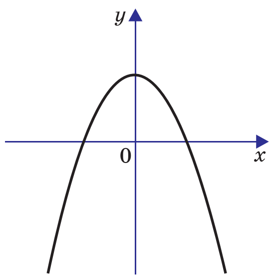

Рис. 17

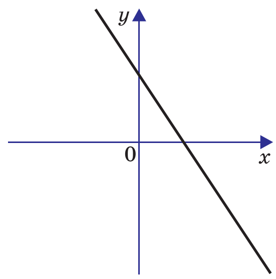

Рис. 18

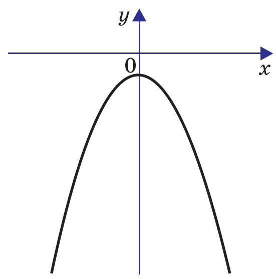

Рис. 19

В сильном классе можно попросить придумать тригонометрическое неравенство, имеющее такое же решение. Один из возможных и неожиданных ответов такой: $\arcsin x + 2 \geq 0$.

Производная

В этой теме нам необходимо добиться, чтобы каждый ученик в простых случаях умел соотносить график функции и график ее производной. Очень важно и непросто для школьника то, что производная «отвечает» за экстремумы, но «ничего не знает» про нули функции. Серия задач на нахождение нужной пары графиков функции и ее производной позволяет эти знания закрепить.

Правда, здесь придется заранее, на перемене нарисовать табличку графиков либо воспользоваться заготовкой на интерактивной доске.

Итак, у нас есть 8 прямых — графиков линейной функции (рис. 15):

Это кандидаты на то, чтобы быть графиком производной функций, которые мы будем последовательно предъявлять. Разумеется, важно не только назвать номер «кандидата», но и объяснить, почему он подходит.

1. Рассмотрим рис. 16. *Производная меняет знак с минуса на плюс, точка минимума, она же нуль производной, отрицательна, следовательно, производная изображена на рисунке* 15.7.

2. Рассмотрим рис. 17. *Ответ на рисунке* 15.2. *Нужны объяснения, аналогичные пункту* 1.

3. Рассмотрим рис. 18. *График производной — горизонтальная прямая, значения везде отрицательны. Ответ на рисунке* 15.4.

4. Рассмотрим рис. 19. *Конечно, производная такая же, как в пункте 2. А то, что нулей у функции нет, ни на что не влияет. Для слабых школьников — это нужно повторять и закреплять не единожды.*

5. Рассмотрим рис. 20. *Среди любых прямых «кандидата на график производной» этой функции нет. Важно обсудить, почему не подходит прямая на рисунке* 15.8. *Функция везде возрастает, и значения линейной функции на рисунке* 15.8 *везде положительны. Почему же она не может быть графиком подходящей производной? Потому что она постоянна и, значит, может быть производной только линейной функции.*

В более сильном классе можно заготовить разные виды квадратичных парабол (ветвями вверх и вниз, с нулями и без) и потом предъявлять различные кубические параболы с заданием найти из данного набора квадратичных парабол «кандидата на график производной».

Тригонометрические неравенства

1. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 21.

Это задание посильно любому классу. Ответ прост: $\operatorname{tg} x > 0$ *или* $\operatorname{ctg} x > 0$.

2. Добавим пару точек (рис. 22).

Теперь, чтобы задать нужное неравенство, нужно вспомнить области определения тангенса и котангенса. Верный ответ: $\operatorname{ctg} x \geq 0$. *А тангенс не подходит*.

3. Добавим еще пару точек (рис. 23).

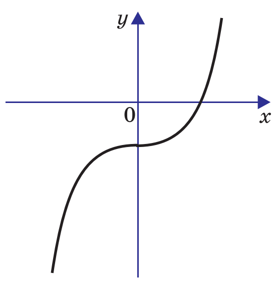

Рис. 20

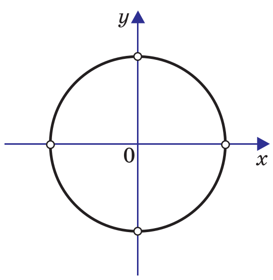

Рис. 21

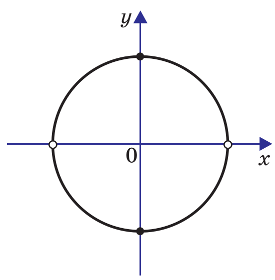

Рис. 22

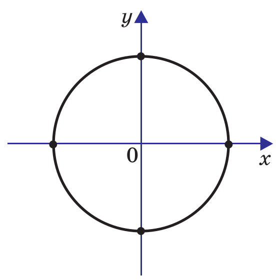

Рис. 23

Здесь ни тангенс, ни котангенс не годятся. Мысль о том, что у косинуса и синуса должны быть одинаковые знаки, приводит к решению: $\sin x \cos x \ge 0$ *или* $\sin 2x \ge 0$.

Понимание того, что знаки тангенса и синуса двойного угла совпадают везде, где оба существуют, хотя и вытекает прямо из формул, является довольно полезным, так как отсылает нас к общему утверждению про знак произведения и частного пары выражений.

4. Задайте неравенство, решение которого изображено на рисунке 24.

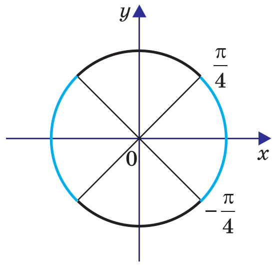

Рис. 24

Нетрудно придумать неравенство с тангенсом: $\mathrm{tg}^2 x \le 1$. *Менее очевидно решение через косинус:* $\cos 2x \ge 0$, *оно получается из решения 3 сдвигом на* $\frac{\pi}{4}$ *(используя формулу приведения). Интересно обсудить, почему эти два неравенства равносильны, какими преобразованиями можно получить из первого неравенства второе.*

5. Последнее задание — трудное. Его можно дать в качестве домашнего необязательного задания.

Задайте неравенством знак радиоактивной опасности *рис. 25* (дуги, соответствующие обозначенным черным цветом секторам).

Рис. 25

В заключение покажем еще один тип задач для устного счета.

Задай вопрос по данной конструкции

Учитель пишет на доске некий «математический объект» и просит учеников задавать про него вопросы. Например, на доске написано выражение $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

Школьники задают всевозможные вопросы и задания к этому выражению. Эти вопросы учитель переадресовывает классу, и получается диалог вроде такого:

– *Что это?*

– Это алгебраическая дробь.

– *Сократите ее.*

$-\frac{x}{2}$.

– *Интересно. Как так могло получиться?*

– Убрали одинаковые слагаемые сверху и снизу.

– *А так можно делать?*

– Нет, можно сокращать на общий множитель.

– *При каких x определена дробь?*

– При x неравном двум.

– И еще минус двум.

– *Как найти все значения?*

– Приравнять знаменатель к нулю и решить уравнение.

– *Решите уравнение* $\frac{x^2+2x}{x^2-4}=0$.

– $x = 0$.

– И еще $x = -2$.

– Нет, -2 запрещено.

– *Постройте график функции* $y=\frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

– Мы таких еще не проходили!

– Если взять сокращенную дробь, то получим $y=\frac{x}{x-2}$, а это гипербола.

– И еще надо выколоть точку $x = -2$.

И так далее.

В виде конструкции может быть геометрическая фигура с набором данных. Самый простой пример — прямоугольный треугольник с заданными катетами. Ученики спрашивают все, что им хочется найти, и сами отвечают на эти вопросы. Довольно легко задать около десятка вопросов, ответы на которые можно получить в уме. Эту тему уместно повторять в первом полугодии 10-го класса, пока в курсе стереометрии изучается параллельность и знания по планиметрии практически не задействованы.

Подведем итог. Регулярные устные упражнения позволяют повторять изученные темы, обучают концентрации внимания, задают хороший темп и ритм урока, помогают находить связи разных тем курса. Это одна из самых динамичных, неожиданных (как для ученика, так часто и для учителя) и импровизационных частей урока. Желаем коллегам творческих успехов в его применении.